**Вероятности сложных событий.**

**Основные правила вычисления вероятностей сложных событий.**

**1. *Вероятность достоверного события***равна единице:

(1)

**2. *Вероятность объединения (суммы) несовместных событий***равна сумме их вероятностей:

(2)

Эти два равенства являются аксиомами теории вероятностей, т. е. принимаются в качестве исходных, но требующих доказательства свойств вероятностей. На их основе строится вся теория вероятностей.

Все остальные, приведенные ниже без доказательств формулы могут быть выведены из принятых аксиом.

**3.** ***Вероятность невозможного события***равна нулю:

.(3)

**4.** ***Вероятность события, противоположного*** событию А, равна

(4)

Формула (4) оказывается полезной на практике в тех случаях, когда вычисление вероятности непосредственно события *А* затруднительно, в то время как вероятность противоположного события находится просто.

**5.** ***Теорема сложения вероятностей***. Вероятность объединения произвольных событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

.(5)

Для несовместных событий  и формула (5) переходит в (2).

**6.** ***Условная вероятность.***Если требуется найти вероятность события *В* при условии, что произошло некоторое другое событие *А*, то такую ситуацию характеризуют с помощью условной вероятности. Условная вероятность равна отношению вероятности произведения событий *А* и *В* к вероятности события *А*:

(6)

В тех случаях, когда события *А* и *В* несовместны,  и соответственно.

**7.** Определение условной вероятности в виде (6) дает возможность записать следующую формулу для **вычисления вероятности произведения событий**(*теорема умножения вероятностей*)

(7)

**8.** Поскольку вероятность события *А* (или *В*) для независимых событий по определению не изменяется при появлении другого события, то условная вероятность  совпадает с вероятностью события *А*, а условная вероятность  — с *Р(В)*. Вероятности *Р(А)* и *Р(В*) в отличие от условных вероятностей называются безусловными.

, , (8)

***Теорема умножения вероятностей для независимых событий*** записывается следующим образом:

(9)

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

**9.** Вычислим ***вероятность появления хотя бы одного события в n испытаниях***

*А*– появление в *n* испытаниях **хотя бы** один раз интересующего нас события.

 – интересующее нас событие не появилось в *n* испытаниях **ни разу**.

*А*1 – интересующее нас событие появилось в первом испытании.

*А*2 – интересующее нас событие появилось во втором испытании.

….

*А*n – интересующее нас событие появилось в *n*-ом испытании.

(10)

**10.** ***Формула полной вероятности***. ***Формула Бейса.***

Если событие *А* может произойти только при появлении одного из несовместных событий *Н1, Н2, …, Нn*, то

(11)

**Пример 1.**

В урне 5 белых, 20 красных и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым или черным?

**Решение.** Пусть событие *А* – появление белого или черного шара. Разобьем это событие на более простые.

Пусть *В*1 – появление белого шара, а *В*2 – черного. Тогда, *А=В1+В2* по определению суммы событий. Следовательно *Р(А)=Р(В1+В2)*. Так как *В1* и *В2* – несовместные события, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий **(формула 2)** *Р(В1+В2) = Р(В1)+Р(В2)*.

Вычислим вероятности событий *В1* и *В2*. В этом примере имеется 35 равновозможных (шары не отличаются по размеру) исходов опыта, событию *В1* (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому . Аналогично, . Следовательно, .

**Пример 2.**

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них, независимо от другого, может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

**Решение.** Пусть событие *А* – “обнаружен хотя бы один преступник”. Разобьем это событие на более простые.

Пусть *В1* – обнаружен первый преступник, а *В2* – обнаружен второй преступник. Тогда, *А=В1+В2* по определению суммы событий. Следовательно *Р(А)=Р(В1+В2)*. Так как *В1*и *В2* – **совместные** события, то по теореме о вероятности суммы событий **(формула 5)**

*Р(В1+В2) = Р(В1)+Р(В2)-Р(В1 В2) = 0,5+0,5 – 0,25=0,75*.

Можно решать и через обратное событие: .

**Пример 3. а)**

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой из дверей он тратит 5 сек. Найти вероятность того, что он откроет все двери за 15 сек.

**Решение.**

Пусть событие *А* – “открыты все двери”. Разобьем это событие на более простые. Пусть *В* – “открыта 1-я“, *С* – “ открыта 2-я“, а *D* – “ открыта 3-я“.

Тогда, ***А=ВСD***по определению произведения событий. Следовательно *Р(А)=Р(ВСD)*. По теореме о вероятности произведения независимых событий **(формула 9)** *Р(ВСD) = Р(В)Р(C) Р(D)*.

Вычислим вероятности событий *В, C* и *D*. В этом примере имеется 3 равновозможных (каждый ключ выбираем из 3-х) исходов опыта. Каждому из событий *В, C* и *D* благоприятствует 1 из них, поэтому . .

**Пример 3. б)**

Изменим задачу: считаем, что преступник – забывчивый человек. Пусть преступник, открыв дверь, оставляет ключ в ней. Какова тогда вероятность, что он откроет все двери за 15 сек?

**Решение.** Событие *А* – “открыты все двери”. Опять, *А=ВСD* по определению произведения событий. Следовательно *Р(А)=Р(ВСD)*. Но, теперь события *В, C* и *D* – зависимы. По теореме о вероятности произведения зависимых событий *Р(ВСD) = Р(В)Р(C|B) Р(D|BC)*.

Вычислим вероятности : ,  (ключа осталось только два и один из них подходит!),  и, значит, .

**Пример 4.**

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. После поимки одно из них, в связи с увеличением количества сотрудников, занятых в поисках, вероятность найти второго возрастает до 0,7. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружены оба преступника.

**Решение.** Пусть событие *А* – “обнаружены два преступника”. Разобьем это событие на более простые. Пусть *В1* – обнаружен первый преступник, а *В2* – обнаружен второй преступник, после того, как пойман первый. Тогда, *А=В1В2* по определению произведения событий. Следовательно *Р(А)=Р(В1В2)*. Так как *В1*и *В2* – зависимые события, то по теореме о вероятности произведения зависимых событий (**формула 7**)

 *Р(В1В2) = Р(В1)Р(В2*/*В1) = 0,5 0,7=0,35*.

**Пример 5.**

Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 10 раз герб выпадет хотя бы 1 раз.

**Решение.** Пусть событие *А* – “герб выпадет **хотя бы** 1 раз”. Рассмотрим обратное событие:  – “герб не выпадет **ни разу**”. Очевидно, что обратное событие легче чем исходное разбить на более простые. Пусть *А1* – герб не выпал при первом броске, *А2* – герб не выпал при втором броске, … *А10* – герб не выпал при 10-м броске. Все события*А1*…*А10* независимы, следовательно, (формула 4.11)

.

**Пример 4.8**

В проведении операции по освобождению заложников участвуют 2 группы снайперов: 10 человек с винтовкой ОП21 и 20 человек с АКМ47. Вероятность поражения из ОП21 – 0,85, а АКМ47 – 0,65. Найти вероятность того, что при одном выстреле произвольного снайпера преступник будет поражен.

**Решение.** Пусть событие *А* – “преступник поражен”. Разобьем это событие на более простые. Преступник может быть поражен либо из ОП21, либо из АКМ47. Вероятность того, что произвольный снайпер вооружен ОП21 (событие *Н1*) равна 10/30. Вероятность того, что произвольный снайпер вооружен АКМ47 (событие *Н2*) равна 20/30.

Вероятность того, что преступник поражен равна (формула 4.12)

.

.

Для студентов распечатано.

**Задача 1.**

В урне 5 белых, 20 красных и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым или черным?

**Задача 2.**

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

**Задача 3. а)**

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой из дверей он тратит 5 сек. Найти вероятность того, что он откроет все двери за 15 сек.

**Задача 3. б)**

Изменим задачу: считаем, что преступник – забывчивый человек. Пусть преступник, открыв дверь, оставляет ключ в ней. Какова тогда вероятность, что он откроет все двери за 15 сек?

**Задача 4.**

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. После поимки одно из них, в связи с увеличением количества сотрудников, занятых в поисках,  вероятность найти второго возрастает до 0,7. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружены оба преступника.

**Задача 5.**

Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 10 раз герб выпадет хотя бы 1 раз.

**Задача 6.** В проведении операции по освобождению заложников участвуют 2 группы снайперов: 10 человек с винтовкой ОП21 и 20 человек с АКМ47. Вероятность поражения из ОП21 – 0,85, а АКМ47 – 0,65. Найти вероятность того, что при одном выстреле произвольного снайпера преступник будет поражен.