МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
«БЕЛОКАЛИТВИНСКИЙ ГУМАНИТАРНО-ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине ОП.07 Прикладная математика

для специальности 13.02.13 Эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)

г. Белая Калитва
2024 г.

ОДОБРЕНО
цикловой комиссией
специальности 13.02.13
Эксплуатация и обслуживание
электрического иэлектромеханического
оборудования
Протокол №1
от «14» февраля 2024г.
Председатель ____________
Калабухова Л.А.

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по УВР
____
Зубкова О.Н.
«15» февраля 2024г.

Разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования (далее ФГОС СПО) по специальности 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий (утвержденный Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 44 от 23.01.2018г.), Положения о планировании, организации и проведении лабораторных и практических занятий.

Организация – разработчик: ГБПОУ РО «БГИТ»
Разработчик: Е.В. Моргачева преподаватель ГБПОУ РО «БГИТ»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Практические работы по дисциплине ОП.07 Прикладная математика выполняются в рамках проведения практических занятий, предусмотренных учебным планом. Практическое занятие − целенаправленная форма организации педагогического процесса, направленная на углубление научно-теоретических знаний и овладение методами работы, в процессе которых вырабатываются умения и навыки выполнения учебных действий в данной сфере науки.

Практические занятия предназначены для углубленного изучения учебных дисциплин и играют важную роль в выработке у студентов умений и навыков применения полученных знаний для решения практических задач. Кроме того, они развивают научное мышление и речь, позволяют проверить знания студентов и выступают как средства оперативной обратной связи.

Цель практических занятий − углублять, расширять, детализировать теоретические знания и содействовать выработке навыков профессиональной деятельности. Проведение практических занятий отвечает направленности изучения дисциплины.

Практические занятия имеют ярко выраженную специфику, поэтому для каждой практической работы разработаны частные инструкции.

Форма познавательной деятельности студентов: групповая, индивидуальная.
Методы обучения: методы развивающего обучения (репродуктивный, частично – поисковый).
Методическое обеспечение: лекционный материал, литература, методические указания и инструкции для выполнения практических работ, задание и исходные данные для выполнения работы.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Перед выполнением практических работ обучающемуся необходимо ознакомиться с инструкцией к ним.
2. Задание практической работы выполняется каждым обучающимся самостоятельно.

Критерии оценки выполнения заданий практических работ

Оценка «5» ставится в том случае, если обучающийся:
1. Выполнил работу в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности.
2. Правильно и аккуратно выполнил все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления и сделал выводы.
3. Правильно выполнил требуемые вычисления, если они были предусмотрены работой.
4. Соблюдал требования безопасности труда.

Оценка «4» ставится в том случае, если выполнены требования к оценке «5», но:
1. Было допущено два-три недочета, или не более одной негрубой ошибки и одного недочета.

Оценка «3» ставится в том случае, если:
1. Допущены в общей сложности не более двух ошибок (в записи единиц измерения, в вычислениях, графиках, таблицах, схемах, и т.д.), не принципиального для этой работы характера, но повлиявших на результат выполнения.
2. Работа выполнена не полностью, однако объем выполненной части таков, что позволяет получить правильные результаты и выводы по основным, принципиально важным задачам работы.

Оценка «2» ставится в том случае, если:
1. Работа выполнена не полностью и объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Перечень практических работ по учебной дисциплине ОП.07 Прикладная математика

Практическая работа №1: «Решение систем линейных уравнений различными способами».
Практическая работа №2: «Операции над векторами»
Практическая работа №3: «Вычисление производных».
Практическая работа №4: «Вычисление геометрических, механических, физических величин с помощью определенного интеграла».
Практическая работа № 5: «Решение дифференциальных уравнений»
Практическая работа №6: «Выполнение действий с приближенными числами»
Практическая работа №7 «Выполнение действий с комплексными числами»
Практическая работа №8 «Числовые ряды»
Практическая работа №9 «Диаграммы Эйлера-Венна»
Практическая работа №10 «Вероятность события»

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №1

Тема: «Решение систем линейных уравнений различными способами»

Цель работы: Научиться применять различные методы для решения систем линейных уравнений.

Теоретические положения:

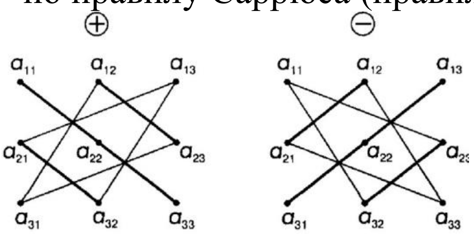
Для решения систем линейных уравнений применяются различные методы:

- метод подстановки заключается в том, что из одного уравнения системы выражают какую-либо переменную через другую переменную и полученное выражение подставляют в другое уравнение системы, получая уравнение с одной переменной.

- метод алгебраического сложения заключается в умножении уравнений на подобранные множители для уравнивания коэффициентов при неизвестных, чтобы в результате сложения одно из неизвестных исключилось и получилось уравнение с одним неизвестным.

- по формулам Крамера с помощью теории определителей решаются системы уравнений с двумя и более неизвестными.

- по правилу Саррюса (правилу треугольников)



- метод Гаусса - путем последовательного исключения переменных и сведения системы к треугольному виду.

Содержание отчета о работе:

Тема и цель работы.

1. Решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными
   - методом подстановки;
   - методом алгебраического сложения;
   - по формулам Крамера
2. Решение системы линейных уравнений с тремя неизвестными
   - по формулам Крамера
   - по правилу треугольников (правилу Саррюса)
   - методом Гаусса

Вывод

Задание: Применить методы решения систем линейных уравнений по исходным данным в соответствии с номером варианта.

1 вариант	2 вариант
$\begin{cases} 5x - 2y = 7, \\ 3x + 4y = 25; \end{cases}$ $\begin{cases} -x + 2y + z = 7, \\ 3x - y + 6z = 19, \\ -4x + 3y - z = 8; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 5x - y = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 1, \\ 4x - y + 5z = -3; \end{cases}$
3 вариант	4 вариант
$\begin{cases} 3x + 5y = 14, \\ 2x - 4y = -20; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = -11, \\ 3x + 2y - z = 7; \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 4y = 14, \\ 4x + 3y = -27. \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \\ 2x - 3y + z = 17; \end{cases}$

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №2

Тема: «Операции над векторами**»**

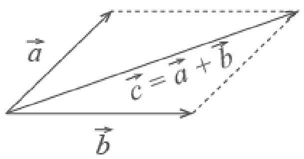
Цель работы: Научиться выполнять действия с векторами: сложение, вычитание, проецирование и умножение на число графически и аналитически

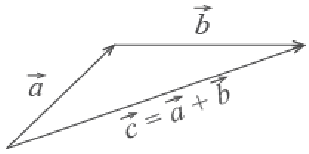
Теоретические положения:

Сложение векторов

Для сложения векторов есть два способа.

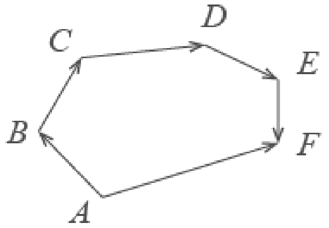
1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов.





2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов.

По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

При сложении векторов, заданных координатами. получаем:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{c}\ (x_a + x_b\ ,\ y_a + y_b)$

При сложении векторов, заданных проекциями, получаем:

$$\begin{cases} P_{ix} = P_i \cos \alpha_i \\ P_{iy} = P_i \sin \alpha_i \end{cases}$$

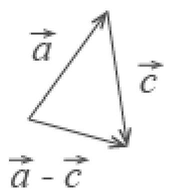
$$\begin{cases} R_x = \Sigma\, P_{ix} \\ R_y = \Sigma\, P_{iy} \end{cases}$$

Модуль суммарного вектора определяется по теореме Пифагора, т.к. проекции вектора на оси координат взаимно перпендикулярны.

$$R_{ан} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

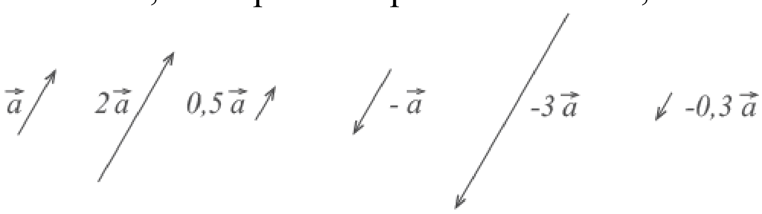
Вычитание векторов

$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$$

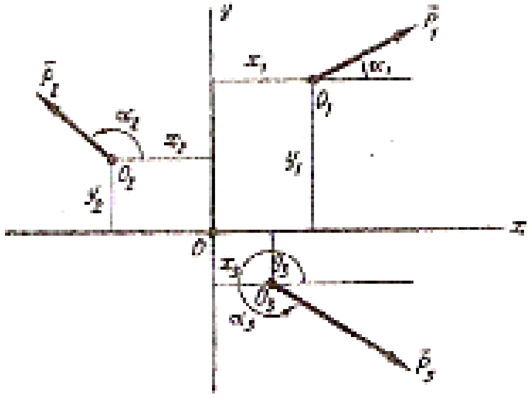


Умножение вектора на число

При умножении вектора на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины заданного вектора. Он сонаправлен с исходным вектором, если k >0, и направлен противоположно, если k < 0.



Задание: Построить вектора по исходным данным в соответствии с номером варианта, сложить графически все три, вычесть из первого третий, второй вектор умножить на 2. Проверить правильность решения аналитически.



№ вар.	Заданные длины векторов			Координаты точек приложения векторов						Углы, град		
	P_1	P_2	P_3	X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	α_1	α_2	α_3
1	2	3	6	5	5	-8	6	4	-2	30	120	270
2	4	5	3	4	8	-7	2	5	-4	30	120	270
3	1	4	3,5	7	2	-1	1	3	-7	30	120	270
4	5	5,5	4	2	3	-7	-8	5	-8	30	120	270
5	2	3	1	1	7	-6	-1	6	-3	30	120	270
6	1,5	4	5	3	8	-3	-3	5	-4	30	120	270
7	2,5	3,5	4	4	8	-4	-4	6	-2	30	120	270
8	5	4	1,5	5	8	-6	7	5	-4	30	120	270
9	4	2	3,5	6	7	-4	8	8	-6	30	120	270
10	3	4,5	2	7	6	-5	-8	7	-6	30	120	270
11	1	6	1,5	8	5	-2	4	8	-3	30	120	270
12	4	3	2,5	6	4	-1	-4	5	-4	30	120	270
13	2	3	4,5	5	2	-8	5	4	-6	30	120	270
14	5	4	2	5	1	-2	6	3	-8	30	120	270
15	1,5	5	2	8	7	-2	3	7	-5	30	120	270

Порядок выполнения:

1. Построение векторов по исходным данным в соответствии с номером варианта.
2. Графическое сложение трех заданных векторов
3. Графическое вычитание из первого третий
4. Умножение второго вектора на 2
5. Аналитическая проверка проецированием заданных и полученных векторов на оси координат (6 шт)

- спроецировать на оси координат заданные вектора;
- выполнить действия в соответствии с заданием.

6. Аналитическая проверка через заданные координаты векторов

- определить координаты концов заданных векторов;
- выполнить действия в соответствии с заданием.

7. Определение процента расхождения результатов полученных графическим и аналитическим способами.

Содержание отчета о работе:

1. Тема и цель работы.
2. Условие поставленной задачи.
3. Графическое выполнение задания
4. Аналитическая проверка
5. Определение процента расхождения результатов полученных графическим и аналитическим способами.
6. Вывод

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

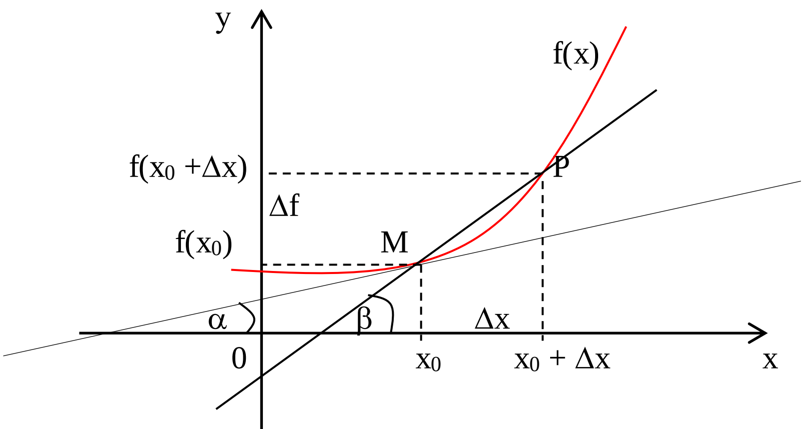
ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №3

Тема: «Вычисление производных»

Теоретические положения:

Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$, \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Односторонние производные функции в точке.

Определение. Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad\qquad f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f(x) = |x|$ - имеет в точке $x = 0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;
2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5) $\left(e^x\right)' = e^x$
6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
9) $(\sin x)' = \cos x$
10) $(\cos x)' = -\sin x$
11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Задание 1 Найти производные 1-го порядка данных функций.

	Задание	
Вариант 1	*а)* $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} - 2$; *б)* $S = (4 - 2\sin t)e^t$; *в)* $u = \cos^5(4V - 1)$; *г)* $z = \frac{\arcsin 2t}{1 - 4t^2}$.	*а)* $y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$; *б)* $s = (3 + \mathrm{tg}t)(1 - 5\mathrm{ctg}t)$; *в)* $u = \sqrt[3]{1 - 4V^2}$; *г)* $z = \frac{\sin(2 - t)}{2 - \ln 3t}$.
Вариант 2	*а)* $y = \frac{4}{\sqrt{x}} + 9x^2 - \frac{7}{x}$;	*а)* $y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$; *б)* $s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$;

	б) $s=\dfrac{2-\ln t}{1+2\arcsin t}$; *в*) $u=tg^3(6V+1)$; *г*) $z=e^{-4t^2}(5+\cos 2t)$.	*в*) $u=\arcsin^3 2V$; *г*) $z=\dfrac{4t^3-2e^{3t}}{\cos t}$.
Вариант 3	*а*) $y=x^3-\dfrac{3}{x^4}+\sqrt[4]{x^9}$; *б*) $s=(4-\cos t)\ln t$; *в*) $u=\operatorname{arctg}^2\dfrac{V}{2}$; *г*) $z=\dfrac{\arccos 3t}{1-9t^2}$.	*а*) $y=7x^2+\dfrac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$; *б*) $s=(1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg} t)$; *в*) $u=\sin^4(2V+3)$; *г*) $z=\dfrac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2}$.
Вариант 4	*а*) $y=5x^9+\dfrac{2}{x^3}+\sqrt[8]{x}$; *б*) $s=\dfrac{e^t-5t}{t^3}$; *в*) $u=\operatorname{ctg}^4\dfrac{V}{4}$; *г*) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{t}{3}\ln(9+t^2)$.	*а*) $y=5x-\dfrac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6}$; *б*) $s=(t^2-3)(4t+2\ln t)$; *в*) $u=\cos^3(3V+1)$; *г*) $z=\dfrac{t-\arcsin 3t}{e^{-t}}$.
Вариант 5	*а*) $y=2x^3-\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5}$; *б*) $s=t^3(4+2\operatorname{arctg} t)$; *в*) $u=\ln^3\dfrac{V}{2}$; *г*) $z=\dfrac{5-\sin 3t}{e^{2t}}$.	*а*) $y=x^4+\dfrac{1}{x}-2\sqrt[3]{x}$; *б*) $s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$; *в*) $u=\ln^2(5V-3)$; *г*) $z=\dfrac{1-3\operatorname{tg} t}{\operatorname{arctg} 2t}$.

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №4

Тема: Вычисление геометрических, механических, физических величин с помощью определенного интеграла

Цель работы: Применить неопределенный и определенный интегралы для решения прикладных задач.

Теоретические положения:

С помощью интегралов можно решать различные технические задачи: определение геометрических параметров тел сложной формы, кинематические параметры движения, работу сил упругости и т.д.

Тела вращения образуются путем вращения плоских фигур или графиков функций вокруг неподвижной оси. Объем тела вращения определяется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

Скорость – векторная величина. Вектор направлен по касательной к траектории в сторону движения и определяется как первая производная уравнения пути.

$V = \frac{dS}{dt} = S'$, следовательно, $S = \int V \, dt$

Ускорение имеет две составляющие – нормальную, характеризующую изменение направления скорости, направленную по нормали к траектории и касательную, характеризующую изменение величины скорости, направленную по касательной к траектории.

$a_n = \frac{V^2}{R}$ -нормальное ускорение;

$a_t = \frac{dV}{dt} = V'$- касательное ускорение определяется как первая производная уравнения скорости или вторая производная уравнения пути;

$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ - полное ускорение.

Задание: Решить задачи по исходным данным в соответствии с номером варианта.

Задача №1: Дано уравнение скорости прямолинейного движения точки. Определить ускорение и закон движения точки, если за время t точка прошла S метров.

Уравнение скорости	Вариант	a	b	t, c	S, м
$V = at^2 + b$	1	15	30	2	120
	2	12	20	4	110
	3	9	15	3	125
	4	18	40	2	105
	5	6	25	4	100

Порядок решения:

1. Определение ускорения.
2. Определение закона движения.

Задача №2: Дано уравнение скорости прямолинейного движения точки. Определить закон движения и пройденный ею путь от начала движения до времени t и за последнюю секунду.

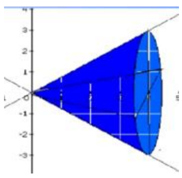
Уравнение скорости	Вариант	a	b	c	t, c
$V = at^2 + bt + c$	1	6	30	10	5

	2	9	20	14	4
	3	12	15	18	3
	4	15	40	16	4
	5	18	25	20	2

Порядок решения:

1. Определение закона движения.
2. Интегрирование в заданных пределах

Задача №3: Вычислить объем тела вращения, образованного вращением прямой y=kx вокруг оси ОХ и прямой x=b.

Тело вращения	Вариант	k	b
	1	1/2	3
	2	1/4	4
	3	3/4	2
	4	1/4	3
	5	1/2	4

Порядок решения:

1. Определение пределов интегрирования.
2. Интегрирование в заданных пределах

Содержание отчета о работе:

1. Тема и цель работы.
2. Решение задачи №1
3. Решение задачи №2
4. Решение задачи №3
5. Вывод

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №5

Тема: «Решение дифференциальных уравнений**»**

Цель работы: Научиться решать дифференциальные уравнения разных видов.

Теоретические положения:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения:

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

<u>Теорема Коши.</u> (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x,y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Интегралом дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Интегральной кривой называется график $y = \varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (х, у) существует не менее двух интегральных кривых. Особые решения не зависят от постоянной С. Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой. Не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

<u>Пример 1.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$
.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения.

$$y = \frac{C}{x}$$

Если заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0.$ Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$

Задание 1: Найти общее решение уравнения

1)	2)	3)
$x^2dx = 3y^2dy$	$\sqrt{x}\,dy = \sqrt{y}\,dx$	$(y+1)dx = (x-1)dy$
$xy\,dx = (1+x^2)dy$	$y^2\,dx + (x-2)dy = 0$	$x^2dy - (2xy+3y)dx = 0$

Задание 2: Найти частное решение уравнения с разделяющимися переменными

1) $(y - 2)dy - (x - 1)dx = 0$ при $x = 0$, $y = 4$

2) $(1 + y)dx = (1 - x)dy$ при $x = -2$, $y = 3$

3) $(1 + x)\,dy + (1 - y)dx = 0$ при $x = 1$, $y = 1$

Задание 3: Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

1)	2)	3)
$\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$	$\frac{dy}{dx} = y + 3$	$\frac{dy}{dx} - 2 = 3y$

Содержание отчета о работе:

1. Тема и цель работы.
2. Выполнение заданий
3. Вывод

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №6

Тема: «Выполнение действий с приближенными числами**»**

Цель работы: Научиться выполнять математические действия с приближенными числами с учетом и без учета погрешностей

Теоретические положения:

Все числовые значения, полученные в результате различного рода измерений, являются приближенными. Отбрасывание излишних цифр младших разрядов называется округлением чисел. Цифра называется верной, если граница абсолютной погрешности числа не превосходит единицы того разряда, в котором записана цифра.

Разность между округленным и действительным значением величины A_∂ называется абсолютной погрешность ΔA, имеющей размерность измеряемой величины.

$\Delta A = A_{из} - A_{д}$.

Погрешность измерений оценивается также относительной погрешностью γ_0. Относительная погрешность γ_0 представляет отношение модуля абсолютной погрешности $| \Delta A |$ к действительному значению $A_{д}$ измеряемой величины

$$\gamma_{о} = \frac{\Delta A}{A_{д}} \cdot 100$$

Сложение:

граница абсолютной погрешности: $\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b$

граница относительной погрешности: $\gamma(a+b) = \frac{\Delta\,(a+b)}{a+b}$

Вычитание:

граница абсолютной погрешности: $\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b$

граница относительной погрешности: $\gamma(a-b) = \frac{\Delta\,(a+b)}{a-b}$

Умножение:

граница абсолютной погрешности: $\Delta(a \cdot b) = b\Delta a + a\Delta b$

граница относительной погрешности: $\gamma(a \cdot b) = \frac{\Delta\,a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

граница абсолютной погрешности: $\Delta(a \cdot b \cdot c) = bc\Delta a + ac\Delta b + ab\Delta c$

граница относительной погрешности: $\gamma(a \cdot b \cdot c) = \frac{\Delta\,a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$

Деление:

граница абсолютной погрешности: $\Delta(a / b) = (b\Delta a + a\Delta b)/b^2$

граница относительной погрешности: $\gamma(a/b) = \frac{\Delta\,a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$

Возведение в степень:

граница абсолютной погрешности: $\Delta(a^n) = na^{n-1} \cdot \Delta a$

граница относительной погрешности: $\gamma(a^n) = n\frac{\Delta\,a}{a}$

Извлечение корня:

граница абсолютной погрешности: $\Delta(\sqrt[n]{a}) = \frac{\Delta a}{n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}$

граница относительной погрешности: $\gamma(\sqrt[n]{a}) = \frac{\Delta\,a}{n \cdot a}$

Действия с приближенными числами (без учета погрешностей) выполняют с соблюдением определенных правил подсчета цифр:

1. При сложении приближенные числа округляют так, чтобы в них оставалось на один десятичный знак больше, чем в наиболее грубом слагаемом.

Полученную сумму округляют до количества десятичных знаков наиболее грубого слагаемого.

2. При вычитании не следует производить округление приближенных чисел, так как может произойти потеря точности окончательного результата.

3. При умножении и делении приближенные числа округляют так, чтобы в них оставалось на одну значащую цифру больше, чем их имеется в числе с наименьшим количеством значащих цифр. Полученный результат округляют до числа, имеющего столько значащих цифр, сколько их имелось в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

4. При возведении приближенного числа в степень в окончательном результате сохраняют столько значащих цифр, сколько имелось их в самом приближенном числе.

5. При извлечении корня из приближенного числа в окончательном результате сохраняют столько значащих цифр, сколько имелось их в самом приближенном числе.

6. При вычислениях с большим количеством операций (действий) во всех промежуточных результатах сохраняют на одну цифру больше, чем указано в предыдущих правилах. Окончательный результат округляют согласно указанным правилам.

Задание: Произвести вычисления и установить границы абсолютной и относительной погрешности

Заданные числа	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$a = 6{,}8 \pm 0{,}05$	$a + b$	$a + c$	$b + d$	$b + c$
$b = 3{,}575 \pm 0{,}0002$	$a \cdot c \cdot m$	$b \cdot c \cdot f$	$a \cdot d \cdot m$	$a \cdot c \cdot d$
$c = 2{,}26 \pm 0{,}005$	f / a	f / c	f / d	f / b
$d = 3{,}72 \pm 0{,}04$	a^2	b^2	c^2	d^2
$f = 68 \pm 0{,}3$	$\sqrt{m}$	$\sqrt{m}$	$\sqrt{m}$	$\sqrt{m}$
$m = 25 \pm 0{,}8$	$b \cdot (a - c) / d$	$b \cdot (d - c) / a$	$a \cdot (b - c) / d$	$d \cdot (a - b) / c$

Содержание отчета о работе:

1. Тема и цель работы.
2. Выполнение заданий
3. Вывод

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №7

Тема: «Выполнение действий с комплексными числами**»**

Цель работы: Научиться выполнять математические действия с комплексными числами в алгебраической, показательной и тригонометрической формах

Теоретические положения:

В математике кроме натуральных, рациональных и вещественных чисел имеется ещё один вид, называемый комплексными числами. Такое множество принято обозначать символом C.

Запись комплексного числа:

$z = a + ib$, в котором мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, числа $a,b \in R$ вещественные.

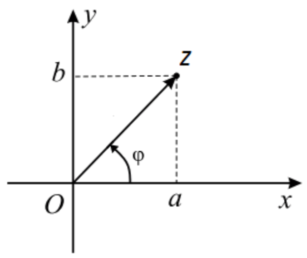
Если $b=0$, то комплексное число превращается в вещественное. Следовательно, действительные числа это частный случай комплексных $R \subset C$.

К каждому комплексному числу $z = a + ib$ существует такое, что $\bar{z} = a - ib$, которое и называется сопряженным. Такие числа отличаются друг от друга только знаками между действительной и мнимой частью.

Формы записи комплексных чисел

1. Алгебраическая $z = a + ib$
2. Показательная $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$
3. Тригонометрическая $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

Изображение комплексного числа на плоскости



Комплексное число $z = a + ib$ представляется в виде вектора, $a,b \in R$ и расположены на соответствующих осях плоскости.

Аргумент обозначается φ – угол наклона вектора.

Модуль |z| равняется длине вектора и находится по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Аргумент комплексного числа φ находится в зависимости от полуплоскости, в которой лежит само число.

Если:

1. $a > 0$, то $\varphi = \text{arctg}\, b/a$
2. $a < 0,\ b > 0$, то $\varphi = \pi + \text{arctg}\, b/a$
3. $a < 0,\ b < 0a$, то $\varphi = -\pi + \text{arctg}\, b/a$

Действия с комплексными числами:

Сложение:

$z_1+z_2 = (a_1+ib_1) + (a_2+ib_2) = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$

$z_1-z_2 = (a_1+ib_1) - (a_2+ib_2) = (a_1-a_2) + i(b_1-b_2)$

Умножение в алгебраической форме:

$z_1 \cdot z_2 = (a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = (a_1a_2-b_1b_2) + i(a_1b_2+a_2b_1)$

Умножение в показательной форме:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot e^{i\varphi 1} \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi 2} = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi 1 + \varphi 2)}$

Деление в алгебраической форме:

$z_1 / z_2 = a_1 + ib_1 a_2 + ib_2 = (a_1a_2 + b_1b_2) / (a_2^2 + b_2^2) + i(a_2b_1+a_1b_2) / (a_2^2+b_2^2)$

Деление в показательной форме:

$z_1 / z_2 = |z_1| \cdot e^{i\varphi 1} \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi 2} = |z_1|\cdot|z_2| \cdot e^{i(\varphi 1-\varphi 2)}$

Возведение в степень в тригонометрической форме:

$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$

Извлечение корня:

$z^{1/n} = |z|^{1/n} \cdot (\cos\varphi + 2\pi kn + i\sin\varphi + 2\pi kn)$, $k = 0,1,...,n-1$

Так же теория комплексных чисел помогает находить корни многочленов. Например, в квадратном уравнении, если $D < 0$, то вещественных корней нет, но есть комплексные.

Задание: Решить квадратное уравнение. Перевести корни в тригонометрическую и показательную формы. Изобразить графически. Выполнить действия: $x_1 + z$, $x_2 - z$, $x_1 \cdot z$, z^2

Вариант	Уравнение	z
1	$x^2 - 2x + 10 = 0$	$3 + 2i$
2	$x^2 - 4x + 13 = 0$	$2 + 3i$
3	$x^2 - 4x + 5 = 0$	$3 + 3i$
4	$x^2 - 6x + 10 = 0$	$4 + 3i$
5	$x^2 + 2x + 5 = 0$	$1 + 2i$

Содержание отчета о работе:

1. Тема и цель работы.
2. Выполнение задания
3. Вывод

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №8

Тема: «Числовые ряды»

Цель работы:. Научиться производить разложение функции в ряд Фурье

Теоретические положения:

Числовым рядом называется выражение вида

$$u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k,$$

$u_k=f(k)$ называется *общим членом ряда.*

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется *n-ой частичной суммой ряда*:

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$ называется *n-м остатком ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$.

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм: $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. Число S называется *суммой ряда*. При этом пишут $\sum_{k=1}^{\infty}u_k=S$. Если предел частичных сумм равен бесконечности, т.е. $\lim_{n\to\infty}S_n=\pm\infty$, или не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Пусть функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[-l;l]$ и имеет период $\mathrm{T}=2l$. Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1)$$

a_0, a_n, b_n называются коэффициентами ряда и вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,2,3\ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \ \ n=1,2,3\ldots \qquad (2)$$

В тригонометрический ряд можно разложить функцию, удовлетворяющую определенным условиям, которые называются *условиями Дирихле.*

Функция $f(x)$ на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, если

1) она непрерывна на этом отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода (т.е. в точках разрыва существуют конечные односторонние пределы, но они не равны между собой);

2) функция на отрезке или не имеет точек экстремума, или имеет их конечное число;

3) существуют односторонние пределы $\lim_{x\to -l+0}f(x)$ и $\lim_{x\to l-0}f(x)$.

Сходимость тригонометрического ряда, составленного для функции $f(x)$, определяется следующей теоремой.

Теорема Дирихле. Пусть функция $y = f(x)$ определена для $x \in (-\infty;+\infty)$, имеет период $T = 2l$ и на отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда ее ряд Фурье сходится на всей числовой оси , т.е. имеет сумму $S(x)$.

При этом:

1) в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к самой функции, т.е. $S(x)= f(x)$;
2) в точках разрыва функции x_0 сумма ряда равна полусумме односторонних пределов функции слева и справа, т.е. $S(x_0)=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right]=\frac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right]$;
3) на концах отрезка $[-l;l]$ сумма ряда определяется формулой:
$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\right]=\frac{1}{2}\left[f(-l+0)+f(l-0)\right].$$

Для четной функции $f(x)= f(-x)$ все коэффициенты b_n=0, и ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (3)$$

где $a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ n=1,2…,

т.е. четная функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам.

Для нечетной функции $f(-x)=-f(x)$ a_0=0, все a_n=0. Тогда

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,3\ldots \qquad (4)$$

Таким образом, нечетная функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье только по синусам. Функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0,l)$ можно произвольно продолжить на интервал $(-l,0)$, или как четную, или как нечетную, а затем разложить в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы или только синусы.

Пример : Функцию $f(x)$, заданную графически, разложить в ряд Фурье:

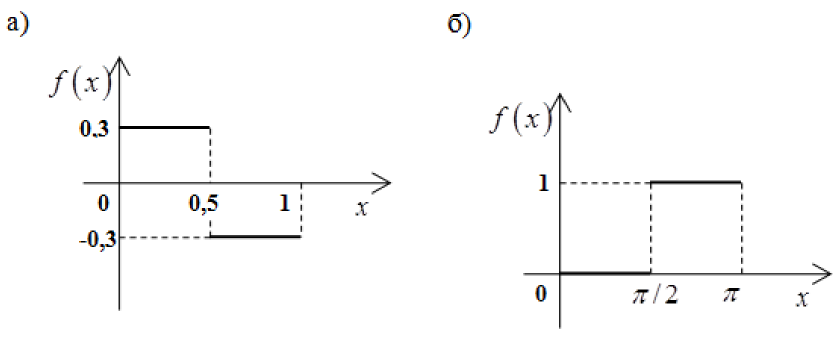


Рис. 1

Решение.

а) Функция, заданная графически на рис. 1а), аналитически описывается следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}3, \ npu\ 0 < x < 0{,}5, \\ -0{,}3, \ npu\ 0{,}5 < x < 1. \end{cases}$$

Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только косинусы, продолжаем ее на соседний слева интервал $(-1{,}0]$ четным образом (рис.2).

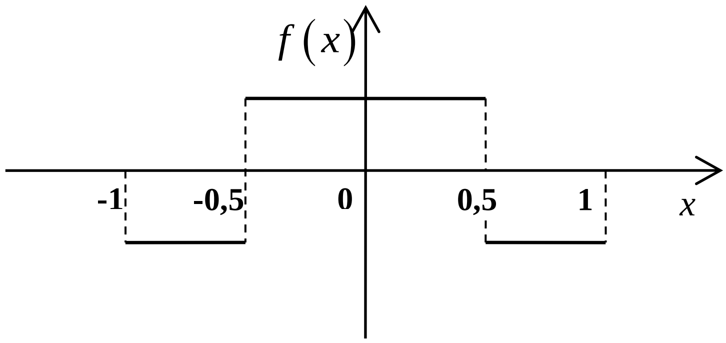


Рис. 2

Полученная функция на $(-l, l)$ удовлетворяет условиям Дирихле: она имеет две точки разрыва первого рода x_1=-0,5 и x_2=0,5 и не имеет точек экстремума, поэтому ее можно разложить в сходящийся ряд Фурье. При этом b_n=0, и по формуле (3), подставляя l=1, $f(x)$=0,3 в интервале (0;0,5) и $f(x)$=-0,3 в интервале (0,5;1), найдем

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx = 2\left(\int_0^{0,5} 0{,}3\cos n\pi x dx - \int_{0,5}^1 0{,}3\cos n\pi x dx\right) =$$

$$=0{,}6\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^{0,5} - \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_{0,5}^1\right) = \frac{0{,}6}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin 0 - \sin n\pi + \sin\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1{,}2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \qquad n \neq 0.$$

Использовали $\sin 0 = 0$, $\sin n\pi = 0$ для $n = 1{,}2{,}3{.}..$

Если n четное, т.е. n=2k, $k \in N$, то $\sin\frac{n\pi}{2} = \sin \pi k = 0$, т.е. a_n=0 для четных номеров n. Если n нечетное, т.е. n=2k-1, $k \in N$, то

$$a_n = \frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}\cos\pi k = (-1)^{k+1}\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi},$$

т.к. по формулам приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = \cos k\pi$, а $\cos k\pi = (-1)^k$, $k \in N$.

При n=0 по формуле для a_0 получим:

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx = 2\left(\int_0^{0,5} 0{,}3dx - \int_{0,5}^1 0{,}3dx\right) = 0{,}6\left(x\Big|_0^{0,5} - x\Big|_{0,5}^1\right) = 0{,}6(0{,}5 - 1 + 0{,}5) = 0.$$

Следовательно, искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы, следующее:

$$f(x) \sim \frac{1{,}2}{\pi}\left[\frac{\cos\pi x}{1} - \frac{\cos 3\pi x}{3} + \frac{\cos 5\pi x}{5} - \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos(2n-1)\pi x}{2n-1} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1{,}2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{2n-1}.$$

По теореме Дирихле полученный ряд сходится на всей числовой оси.

б) Функция, заданная графически на рис. 1б), аналитически описывается следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если}\ \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \textit{если}\ \ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$

Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжим ее на $(-\pi;0]$ нечетным образом (рис 3).

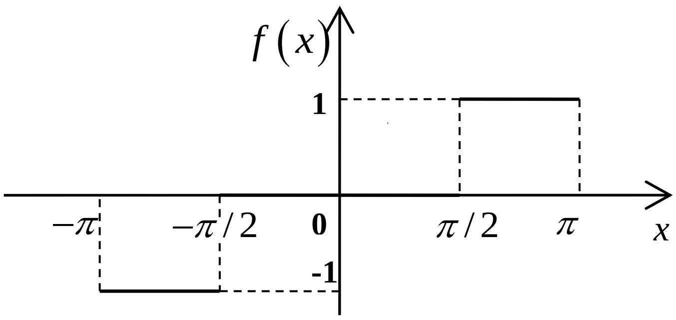


Рис. 3

Полученная функция на $(-\pi;\pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле: имеет две точки разрыва первого рода $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ и не имеет точек экстремума, поэтому ее можно разложить в ряд Фурье, сходящийся на всей числовой оси.

Функция нечетная, поэтому a_n=0, n=0,1,2,…; b_n вычислим по формуле (4), подставляя $l = \pi$, $f(x) = 0$ в интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(x) = 1$ в интервале $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot\sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\cdot\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\cos\pi n - \cos\frac{\pi n}{2}\right) = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n - \cos\frac{\pi n}{2}\right),\ n=1,2,3,\ldots .$$

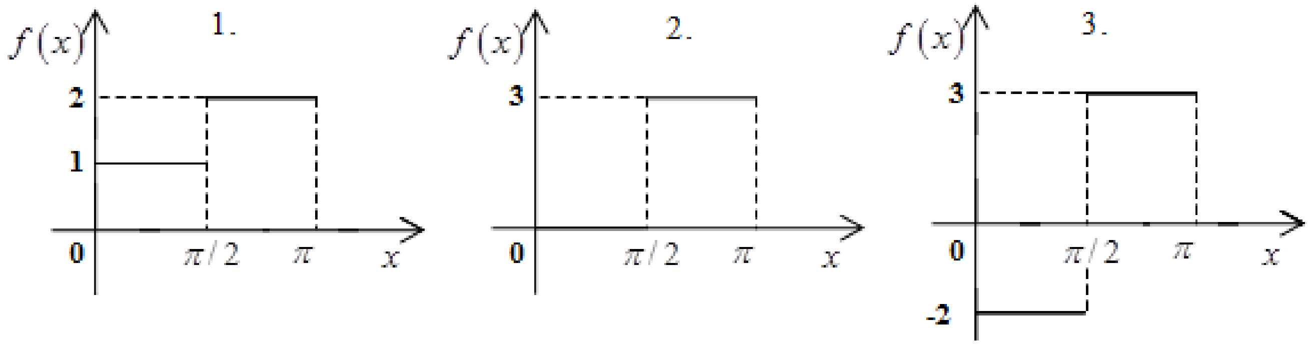
Следовательно, ряд Фурье для функции имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - \cos\frac{\pi n}{2}}{n}\right)\sin nx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{2\sin 6x}{6} + \ldots\right).$$

По теореме Дирихле полученный ряд сходится на всей числовой оси и имеет сумму $S(x)$.

Задание: Для функции $f(x)$, заданной графически, найти ее ряд Фурье по синусам и косинусам на интервале $(0;l)$ (доопределив ее соответствующим образом на интервал $(-l;0)$).



Порядок решения:

1. Задать аналитически $f(x)$ на $(0, l)$;
2. Доопределить функцию на $(-l,0)$ четным или нечетным образом;
3. Проверить выполнение условий Дирихле на $(-l,l)$;
4. Определить коэффициенты ряда Фурье для полученной функции и записать ряд Фурье.

Содержание отчета о работе:

1. Тема и цель работы.
2. Решение задачи
3. Вывод

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №9

Тема: «Диаграммы Эйлера-Венна»

Цель работы: Выполнить операции над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Теоретические положения:

Множество – любая определенная совокупность объектов произвольной природы.

Обозначают множества прописными латинскими буквами: A, B, а его элементы обозначаются строчными латинскими буквами: a, b.

Например:

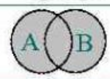
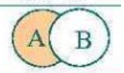
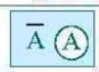
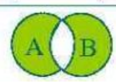
$x \in A$ (**x** является элементом множества **A** ("**x** принадлежит A")),

$x \notin A$ (**x** не является элементом множества A).

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента, обозначается оно символом: Ø.

U– универсальное множество (универсум) – множество, из которого берутся элементы в конкретном рассуждении. U – множество, рассматриваемое как наиболее общее в данной ситуации.

Множество элементов x, удовлетворяющих свойству P(x) обозначается $\{x|P(x)\}$.

Пересечение	$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \}$	
Объединение	$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$	
Разность	$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$	
Дополнение	$\overline{A} = \mathbf{U} \setminus A = \{ x \mid x \in \mathbf{U} \text{ и } x \notin A \}$	
Симметрическая разность	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	

Задание 1: В поход ходили 80 % студентов группы, а на экскурсии было 60 %, причем каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов группы были и там, и там?

Задание 2: На горнолыжном курорте отдыхали 24 человека. 10 человек катались на лыжах, 12 на сноуборде, а 16 ездили на каток. Сколько человек смогли покататься и на лыжах, и на коньках, и на сноуборде?

Задание 3: В лагере «Сириус» в смене актива отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. 10 человек были и отличниками и победителями олимпиад, 5 — отличниками и спортсменами, 8 — спортсменами и победителями олимпиад, 3 — и отличники, и спортсмены, и победители олимпиад. Сколько ребят отдыхали в лагере?

Задание 4: M - подмножество множества натуральных чисел. 10 элементов множества M являются простыми числами, а остальные кратны либо 2, либо 3, либо 5. Определить мощность множества M , если оно содержит: 70 чисел кратных 2; 60 чисел кратных 3; 80 числе кратных 5; 98 чисел кратных или 2 или 3; 95 чисел кратных или 2 или 5; 102 числа кратных или 3 или 5; 20 чисел, кратных 30.

Порядок решения:

1. Записать условие задачи в условных обозначениях теории множеств
2. Выявить соотношения между множествами
3. Изобразить в виде диаграммы Эйлера-Венна
4. Определить требуемые данные

Содержание отчета о работе:

1. Тема и цель работы.
2. Выполнение заданий
3. Вывод

Метод контроля – защита работы - ответы на контрольные вопросы.

Литература:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

ИНСТРУКЦИЯ К ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №10

Тема: «Вероятность события»

Цель работы: Научиться определять вероятность события

Теоретические положения:

Теория вероятностей изучает закономерности для случайных явлений. Одним из основных терминов теории вероятностей является понятие случайного события. **Событием** называется всякий факт (исход), который в результате опыта (испытания, эксперимента) может произойти или не произойти. Каждому из таких событий можно поставить в соответствие определенное число, называемое его **вероятностью,** и являющееся мерой возможного совершения этого события. Например, отказ изделия - событие случайное, которое всегда имеет малую вероятность, если изделие обладает высокой эксплуатационной надежностью.

Совместные события – такие события, появление одного из которых не исключает возможности появления другого.

Попарно несовместные события – такие события, появление одного из которых исключает любые возможности появления другого из остальных.

Зависимые события – такие события, появление одного из которых влияет на появление другого события.

Попарно независимые события – такие события, появление одного из которых не влияет на появление другого события из остальных.

Противоположные события это такие два события A и $\overline{A}$, для которых наступление любого из них приводит к тому, что другое событие не наступает. Например, наступает A, а событие $\overline{A}$ не наступает и, наоборот.

Полная группа событий – такое множество событий, в котором в результате опыта должно произойти хотя бы одно из событий этой группы событий. Противоположные события A и $\overline{A}$ составляют полную группу событий.

Достоверное событие – это такое событие, которое обязательно происходит при проведении опыта.

Невозможное событие – это такое событие, которое не может происходить при проведении опыта.

Элементарное событие – это такое событие, которое не может быть расчленено на более мелкие части по отношению ко всем возможным результатам (исходам) проводимого опыта.

Сложное событие – это такое событие, которое может быть расчленено на более мелкие события и является комбинацией элементарных событий**.** Наиболее удобные для практики комбинации событий является сумма, либо произведение нескольких событий.

Сумма событий $A_1, A_2,.., A_n$ – такое событие A, которое описывается в данном опыте фактом появления хотя бы одного события из указанного $n-$ элементного множества событий. Сумма событий (объединение) обозначается $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Произведение событий $A_1, A_2,.., A_n$ - такое событие A, которое описывается в данном опыте фактом наблюдения одновременного появления всех событий из указанного $n-$элементного множества событий. Произведение событий (пересечение) обозначается $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$. Приведем теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теоремы сложения для совместных и несовместных событий имеют вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ...P(A_n),\ i \neq j, A_i A_j = \varnothing.$$

Теоремы умножения для зависимых и независимых в совокупности случайных событий

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B),$$

$$P(A_1 A_2 .... A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

Символ Ø обозначает пустое множество.

В случае двух событий, которые независимы, условная вероятность и безусловная вероятности совпадают

$$P(B|A) = P(A), P(A|B) = P(A).$$

Пусть событие A может произойти в результате появления только одного события H_i, входящего в полную группу попарно несовместных событий $H_1, H_2,...H_n$, тогда справедлива **формула полной вероятности**, которая позволяет найти вероятность A

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + ... + P(H_n)P(A|H_n).$$

Несовместные события H_i из полной группы называются гипотезами, причем

$$P(H_1 + H_2 + ... + H_n) = P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1.$$

Вероятности гипотез H_i после проведения опыта уточняются **формулой Бейеса**

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Классическое определение вероятности для события A выражается отношением

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число всех элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A;
n – общее число возможных элементарных исходов, которые образуют полную группу равновозможных событий.

Формула Бернулли позволяет найти вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз при проведении n независимых опытов

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}, \ P(A) = p, P(\overline{A}) = q = 1 - p,$$

где p – вероятность появления события A в любом одном испытании, C_n^k – число комбинаций в виде сочетаний из n по k элементов**.**

Комбинация в виде **сочетания из n по k элементов** представляет собой подмножество, состоящее ровно из k разных элементов. Такое подмножество принадлежит заданному n – элементному множеству. Сочетание от другого сочетания отличается хотя бы одним элементом.

Комбинация в виде **размещения из n по k элементов** представляет собой набор, состоящий ровно из k разных элементов. Такой набор принадлежит заданному n – элементному множеству. Размещение от другого размещения отличается либо составом элементов, либо порядком следования элементов. Число комбинаций в виде размещения из n по k элементов находится по формуле

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1), k \le n.$$

В случае $k = n$ размещения превращаются в другие комбинации–перестановки. Число
комбинаций в виде перестановок из n элементов находится с помощью формулы

$$P_n = A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... n = n!.$$

Перестановка от другой перестановки отличается только порядком следования элементов.
Состав элементов в комбинации в виде перестановки остается постоянным.

Пример: Классическое определение вероятности.
Из колоды в 36 карт наудачу извлекли три карты. Найти вероятность среди них окажется валет. Решение. Найдем значения числителя и знаменателя $m = C_4^1 C_{36-4}^{3-1}, n = C_{36}^4$, тогда

$$P(A) = \frac{4 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{16 \cdot 31}{105 \cdot 17} = \frac{496}{1785} = 0{,}278.$$ Ответ $0{,}278$.

Задание: Решить задачи по теме:

1. Среди 10 электрических лампочек 3 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые наугад две лампочки окажутся нестандартными.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
3. В партии из 12 деталей 2 бракованные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех деталей окажутся 2 бракованные.
4. 20 участников шахматного турнира разделили на 2 команды по 10 человек в каждой. Найти вероятность того, что 2 сильнейших игрока окажутся в одной команде.
5. Абонент забыл шестизначный номер телефона и набрал его наугад, помня лишь, что все цифры в нем различны. Какова вероятность набрать нужный номер?
6. В партии из 15 телевизоров 5 имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что 3 телевизора, выбранные наугад, не имеют скрытых дефектов.

Содержание отчета о работе:
1. Тема и цель работы.
2. Решение задачи
3. Вывод

Метод контроля – защита работы - ответы на контрольные вопросы

Контрольные вопросы
1. Событие.
2. Классификация событий
3. Вероятность события
4. Перестановки, размещения, сочетания

Литература:
1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.

.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основные источники:

1. Богомолов Н. В. Математика: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 5 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2010. – 395 с.
2. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 классов образовательных учреждений./Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 12 издание – М.: Просвещение, 2010. – 464 с.
3. Башмаков М.И. Математика. Сборник задач профильной направленности : учеб.пособие для учреждений нач. и сред. Проф.образования. – М. : Издательский центр «Академия», 2012. – 208 с.

Дополнительные источники

1. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов. – 4-е издание, стереотипное. – М.: Высшая школа, 1997. – 495 с.
2. Богомолов Н. В. Сборник дидактических заданий по математике: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов, Л.Ю. Сергиенко. – 2 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2006. – 236 с.
3. Богомолов Н. В. Сборник задач по математике: Учебное пособие для ссузов./Н.В. Богомолов. – 4 – е издание, стереотипное. – М.: Дрофа, 2007. – 204 с.
4. Валуцэ И.И. Математика для техникумов на базе средней школы: Учебное пособие для ссузов./И.И. Валуцэ, Г.Д. Дилигул. – 2 – е издание, переработанное и дополненное. – М.: Наука, 1990. – 576 с.
5. Афанасьева О.Н. и др. Сборник задач по математике для техникумов на базе средней школы. Учеб.пособие для техникумов. – М.: Наука,1987. – 208с.

3.2.3. Интернет-ресурсы:

1. Официальный сайт уроков математики : www.http://videouroki.net
2. Материалы свободной энциклопедии Википедия : http://ru.wikipedia.org